

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ

SUCEAVA, 21 februarie 2016

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

CLASA a XI-a

1. Fie A și B două matrice distincte din $M_n(\mathbb{C})$ astfel încât $A^2 = B^2$.

a) **(4p)** Dacă $AB = BA$ demonstrați că $\det(A + B) = 0$.

b) **(3p)** Rămâne valabilă concluzia de la punctul a) dacă matricele A și B nu comută? Justificați răspunsul!

Soluție. a) Deoarece $AB = BA$ avem $O_n = A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$. Dacă $\det(A + B) \neq 0$, matricea $A + B$ este inversabilă și atunci $(A - B)(A + B) = O_n \quad / \cdot (A + B)^{-1} \Rightarrow A - B = O_n$, adică $A = B$, absurd! În concluzie $\det(A + B) = 0$.

b) Concluzia de la punctul a) nu mai rămâne valabilă atunci când matricele A și B nu comută. Probăm acest fapt prin următorul contraexemplu:

Considerăm $A, B \in M_2(\mathbb{C})$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Avem $A \neq B$, $A^2 = B^2 (= O_2)$,

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ deci } AB \neq BA \text{ și } \det(A + B) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

Barem.

a) $AB = BA \Rightarrow (A - B)(A + B) = O_n$	2 p
$\det(A + B) \neq 0 \Rightarrow \dots \Rightarrow A = B$, absurd!	2 p
b) Concluzia de la punctul a) nu mai rămâne valabilă atunci când A și B nu comută	1 p
Construiește un contraexemplu	2 p

2. (7p) Fie S_5 mulțimea permutărilor de gradul 5 și e permutarea identică din S_5 .

Demonstrați că $\sigma^{60} = e$, $\forall \sigma \in S_5$.

Soluție. Vom folosi următoarele rezultate teoretice:

P1. Orice permutare se descompune ca produs de permutări ciclice disjuncte.

P2. Dacă τ este un ciclu de lungime k atunci $\tau^k = e$.

P3. Dacă $\sigma = c_1 c_2 \dots c_s$, unde c_1, c_2, \dots, c_s sunt cicli disjuncți de lungimi l_1, l_2, \dots , respectiv l_s și $m = c.m.m.c.(l_1, l_2, \dots, l_s)$ atunci $\sigma^m = e$.

Fie $\sigma \in S_5$. În raport cu descompunerea lui σ ca produs de permutări ciclice disjuncte (P1) avem următoarele situații posibile:

- i) $\sigma = e \Rightarrow \sigma^{60} = e$
- ii) $\sigma = \text{ciclu de lungime 2} \xRightarrow{P2} \sigma^2 = e \Rightarrow \sigma^{60} = (\sigma^2)^{30} = e^{30} = e$
- iii) $\sigma = \text{ciclu de lungime 3} \xRightarrow{P2} \sigma^3 = e \Rightarrow \sigma^{60} = (\sigma^3)^{20} = e^{20} = e$
- iv) $\sigma = \text{ciclu de lungime 4} \xRightarrow{P2} \sigma^4 = e \Rightarrow \sigma^{60} = (\sigma^4)^{15} = e^{15} = e$
- v) $\sigma = \text{ciclu de lungime 5} \xRightarrow{P2} \sigma^5 = e \Rightarrow \sigma^{60} = (\sigma^5)^{12} = e^{12} = e$
- vi) $\sigma = \text{produs de doi cicli disjuncți de lungime 2} \xRightarrow{P3} \sigma^2 = e \Rightarrow \sigma^{60} = (\sigma^2)^{30} = e^{30} = e$
- vii) $\sigma = \text{produs de doi cicli disjuncți unul de lungime 2 și unul de lungime 3} \xRightarrow{P3} \sigma^6 = e \Rightarrow$
 $\Rightarrow \sigma^{60} = (\sigma^6)^{10} = e^{10} = e$
- În toate situațiile am obținut $\sigma^{60} = e$.

Barem.

Enunță și/sau utilizează P1, P2, P3	3 p
cazul i)	1 p
cazurile ii) v)	1 p
cazul vi)	1 p
cazul vii)	1 p

3. (7p) Se consideră șirul de numere reale $(x_n)_{n \geq 1}$ cu $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$ și $x_{n+3} = x_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$.

Soluție. Cum $x_{n+3} = x_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$ deducem că șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ este periodic de perioadă 3. Mai precis avem $x_{3n-2} = 1, x_{3n-1} = 2$ și $x_{3n} = 3, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Notăm $y_n = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$. Grupând termenii câte trei (la numărător!) avem:

$$y_{3n} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{3n}}{3n} = \frac{(1+2+3) \cdot n}{3n} = 2, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} y_{3n} = 2$$

$$y_{3n+1} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{3n} + x_{3n+1}}{3n+1} = \frac{(1+2+3) \cdot n + x_{3n+1}}{3n+1} = \frac{6n+1}{3n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} y_{3n+1} = 2$$

$$y_{3n+2} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{3n+2}}{3n+2} = \frac{(1+2+3) \cdot n + x_{3n+1} + x_{3n+2}}{3n+2} = \frac{6n+3}{3n+2}, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} y_{3n+2} = 2$$

Cum șirul $(y_n)_{n \geq 1}$ are trei subșiruri complementare cu limita 2, rezultă că $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 2$.

Barem.

$x_{3n-2} = 1, x_{3n-1} = 2$ și $x_{3n} = 3, \forall n \in \mathbb{N}^*$	2 p
$\lim_{n \rightarrow \infty} y_{3n} = 2$	1 p
$\lim_{n \rightarrow \infty} y_{3n+1} = 2$	1 p
$\lim_{n \rightarrow \infty} y_{3n+2} = 2$	1 p
Finalizare	2 p

4. Fie $(a_n)_{n \geq 1}$ un șir de numere reale cu proprietatea că $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{2n+2} + a_{2n+1} - a_{2n}) = 0$.

a) (5p) Dacă șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este monoton, demonstrați că $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

b) (2p) Rămâne adevărată concluzia de la punctul a) în situația când șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ nu este monoton?

Justificați răspunsul!

Mihai Piticari, Vladimir Cerbu

Soluție. a) Notăm $b_n = a_{2n+2} + a_{2n+1} - a_{2n}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Din ipoteză avem $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$.

Deoarece șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este monoton, rezultă că $(a_n)_{n \geq 1}$ are limită. Fie $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l \in \overline{\mathbb{R}}$.

Dacă $l = +\infty$ deducem că $(a_n)_{n \geq 1}$ este crescător, deci $a_{2n+1} - a_{2n} \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ și atunci $b_n = a_{2n+2} + a_{2n+1} - a_{2n} \geq a_{2n+2}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Cum $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+2} = +\infty$ obținem $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty$, absurd!

Dacă $l = -\infty$ deducem că $(a_n)_{n \geq 1}$ este descrescător, deci $a_{2n+1} - a_{2n} \leq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ și atunci $b_n = a_{2n+2} + a_{2n+1} - a_{2n} \leq a_{2n+2}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Cum $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+2} = -\infty$ obținem $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty$, absurd!

Rămâne că $l \in \mathbb{R}$. Deoarece $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = l \in \mathbb{R}$ putem scrie:

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_{2n+2} + a_{2n+1} - a_{2n}) = l + l - l = l, \text{ adică } l = 0.$$

b) Concluzia de la punctul a) nu mai rămâne valabilă atunci când șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ nu este monoton.

Justificăm acest fapt prin următorul contraexemplu:

Considerăm șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ cu $a_n = \begin{cases} 0, & \text{dacă } n = \text{impar} \\ 1, & \text{dacă } n = \text{par} \end{cases}$.

Evident $(a_n)_{n \geq 1}$ nu este monoton, $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{2n+2} + a_{2n+1} - a_{2n}) = 0$ și $(a_n)_{n \geq 1}$ nu are limită!

Barem.

a) Există $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l \in \overline{\mathbb{R}}$	1 p
Demonstrează $l \in \mathbb{R}$	2 p
Demonstrează $l = 0$	2 p
b) Construiește un contraexemplu	2 p

Notă:

Orice altă soluție corectă se va puncta corespunzător.